

2615121

Π.χ 1 Στον $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτ. γινόμενο και

$W = \langle (2, 0, 4, 4), (-1, 3, 1, 7) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Να γράψετε ένα σύστημα το οποίο να περιγράφει το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^\perp$. κ. β

ορθοκανονική βάση του $W^\perp$ και την προβολή του $u = (1, 1, 1, 1)$ στον $W^\perp$

Για κάθε υπόχωρο Y του Ευκλ. x . V υπάρχει μοναδικό ορθόγ. συμπλ. $Y^\perp$. Τι κοινό έχουν οι Y και $Y^\perp$?

Αρχικά, το αλγεβρικό τους άθροισμα μας δίνει το V

Επίσης η τομή τους μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα

$$Y + Y^\perp = V \quad \text{α. ευθύ συμπλήρωμα}$$

$$Y \cap Y^\perp = \{0\}$$

$$\boxed{\langle v, w \rangle = 0} \quad \forall v \in Y, w \in Y^\perp \quad \text{α. ορθογώνιο συμπλήρωμα}$$

$$W = \langle (2, 0, 4, 4), (-1, 3, 1, 7) \rangle = \langle (1, 0, 2, 2), (-1, 3, 1, 7) \rangle =$$

Εκεί πολλαπλασιάζω με 2

προσθέτω το $1^{\text{ο}}$ στο $2^{\text{ο}}$

$$= \langle (1, 0, 2, 2), (0, 3, 3, 9) \rangle = \langle (1, 0, 2, 2), (0, 1, 1, 3) \rangle$$

↑
παιδί μέσο με 3

• Πώς βρούμε ορθογώνιο συμπλήρωμα υποχώρου?

Υποχρησιμοποιώ το (x)

Παίχνω τώρα $(x, y, z, w) \in W^\perp \Leftrightarrow \langle (x, y, z, w), (a, b, c, d) \rangle = 0$
αυτό είναι κώδεσ με οποιοδήποτε στοιχείο του W

$$\forall (a, b, c, d) \in W \Leftrightarrow \langle (x, y, z, w), (1, 0, 2, 2) \rangle = 0 \quad \text{και}$$

$$\langle (x, y, z, w), (0, 1, 1, 3) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

(Το (x, y, z, w) είναι κώδεσ τόσο στο ένα στοιχείο της βάσης όσο και στο άλλο /

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2z + 2w = 0 \\ y + z + 3w = 0 \end{pmatrix} : \text{Αυτό το σύστημα περιγράφει το } W^\perp$$

$$x = -2z - 2w$$

$$y = -z - 3w$$

• Τι διάσταση έχει το ορθογώνιο συμπλήρωμα?

$$\dim W^\perp = 2 \xrightarrow[\text{τις}]{\text{τις?}} \dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{aligned} W^\perp &= \langle (-2z - 2w, -z - 3w, z, w) \rangle = \langle (-2z, -z, z, 0), (-2w, -3w, 0, w) \rangle \\ &= \langle (-2z, -z, z, 0), (-2w, -3w, 0, w) \rangle = \\ &= \langle (-2, -1, 1, 0), (-2, -3, 0, 1) \rangle = \langle (2, 1, -1, 0), (2, 3, 0, -1) \rangle \end{aligned}$$

• Οέτω ορθοκανονική βάση : 9-5
(2, 1, -1, 0)

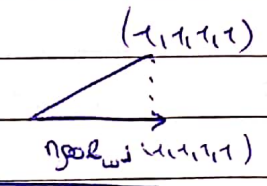
$$(2, 3, 0, -1) - \frac{7}{6} (2, 1, -1, 0) = \left(\frac{-2}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, -1 \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (-2, 11, 7, -6)$$

$W^\perp = \langle (2, 1, -1, 0), (-2, 11, 7, -6) \rangle$ & ορθογώνια δείνω
ορθοκανονική βάση
με τα ίδια

$$W^\perp = \langle \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}} (-2, 11, 7, -6) \rangle$$

η προβολή $(1, 1, 1, 1)$ στην $W^\perp$ είναι $\frac{\langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, -1, 0) \rangle}{6} (2, 1, -1, 0) + \frac{\langle (1, 1, 1, 1), (-2, 11, 7, -6) \rangle}{210} (-2, 11, 7, -6)$



$$+ \frac{\langle (1, 1, 1, 1), (-2, 11, 7, -6) \rangle}{210} (-2, 11, 7, -6) = \dots =$$

Το ναυ με κάθε βάση αυτό; Όχι η βάση είναι ΟΚΒ.

Πλ. 2 Βρείτε το χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο του
πίνακα A . Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον
 A^{-1} σαν γγ. συνδυασμό των A και I .

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & -2 \\ 6-\lambda & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 12-\lambda & 4 \\ 12-\lambda & 10-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda) (12-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 10-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (6-\lambda) (12-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)^2 (12-\lambda) \quad \circ \text{ } A \text{ η γαθ.}$$

απφιστρέφει

↓
Διευκρινίζεται

ο A ~~είναι~~ Διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow \chi_A(x) = \text{πολυνομοδιαφύκων } \phi_{\text{min}} =$
 $= \text{μοινές ρίζες} = (x-6)(x-12)$

Τι σχέση έχει ο αυτοστρογγυός με τις ιδιοτιμές?

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank } A = 3, \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 6^3 \cdot 12 \neq 0$
 $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} A = 24$$

$$A^{-1} = kA + \lambda I$$

$$\chi_A(x) = x^3 - 18x + 72 \Rightarrow A^3 - 18A + 72I = 0_{3 \times 3} \quad \begin{matrix} \text{πολλ. } \chi_A \\ \Rightarrow \\ \text{με } A^{-1} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A^3 - 18A^{-1} \cdot A + 72A^{-1} \cdot I = 0_{3 \times 3}$$

$$A - 18I = -72A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{72} A + \frac{18}{72} I = \frac{-1}{72} A + \frac{1}{4} I$$

(*)

π.χ. 3 $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \neq I, B \neq -I$ και $A^3 - A^2 + A - I = 0_{2 \times 2}$
 $B^3 + B^2 + B + I = 0_{2 \times 2}$. Να δείξετε ότι $\chi_A(x) = \chi_B(x)$

$\deg \chi_A(x)$? Το χαμηλό πολλαίνο είναι πιο σφιχτό και έχει συνημμένο βαθμό

$\deg \chi_A(x) = 2$ εφόσον $M(2 \times 2, \mathbb{R})$

$1 \leq \deg \chi_A(x) \leq 2$ Το $\chi_A(x)$ διαφέρει κάθε πολλαίνο που μηδενίζεται από τον A .

Αν $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ και $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, τότε:

$\chi_A(x) \mid f(x)$ και $\chi_B(x) \mid g(x)$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$\chi_A(x) \mid (x^2 + 1)(x - 1) \Rightarrow \chi_A(x) = x^2 + 1$ ή $\chi_A(x) = x - 1$ διότι τότε

θα είχαμε $A - I = 0_{2 \times 2} \Rightarrow A = I$ άτονο από (*)

$\chi_B(x) = x^2 + 1$ άρα $\chi_A(x) = \chi_B(x)$

Πα. 4 Τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο :

$$q(x, y, z) = 7x^2 + 7y^2 + 70z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$$

Ν.β. οι κυριολεκτικές
 α) να έρδει στην κανονική μορφή

β) Να προσδιοριστεί η ελλειψοειδής με $q(x, y, z) = 1$

γ) Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι θετικός

δ) Να βρείτε πίνακα B ώστε $B^2 = A$

α) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ & Πρέπει να τον διαγωνοποιήσουμε
 Από προηγούμενη άσκηση $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$

$$V(12) = \langle (-1, 1, 2) \rangle$$

$$V(6) = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle$$

Τώρα πρέπει ν.β. τον P
 με τη διαδικασία G-S

$$(-1, 1, 2)$$

$$(2, 0, 1) = \frac{\langle (2, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle}{2} (-1, 1, 0) + (1, -1, 1)$$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x', y', z') = (x, y, z) P \Leftrightarrow (x, y, z) = (x', y', z') P^t$$

Τι πίνακας είναι ο P ? Πίνακας αλλαγής βάσης ορθοκανονικοποιημένων διανυσμάτων στην κανονική βάση

Ιδιότητες ορθογώνιων

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \det 1 : \text{Οι γραμμές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους}$$

Δίνει στροφή κατά φ . Δεν έχει γραμμ. ιδιοτιμές

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \det = -1$$

Δίνει συμμετρικό ως προς τον $\forall (-1)$ ο οποίος χαρακτηρίζεται γινόμενο $\frac{y}{2}$ με x'

Οι ιδιοτιμές τους είναι μιγαδικές και έχουν μέτρο 1

$$(x', y', z') = (x, y, z) P \Leftrightarrow (x, y, z) = (x', y', z') P^t$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = \dots \\ y' = \dots \\ z' = \dots \end{array} \right\} \text{οι άξονες}$$

β) Η επιγονένο είναι ελλειψοειδές διότι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u > 0$

γ) Ο A είναι θετικός $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ και ο A γρήγορα είναι συμμετρικός

$$\delta) A = P \Lambda P^t \text{ ορίζουμε } B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^t = \dots$$

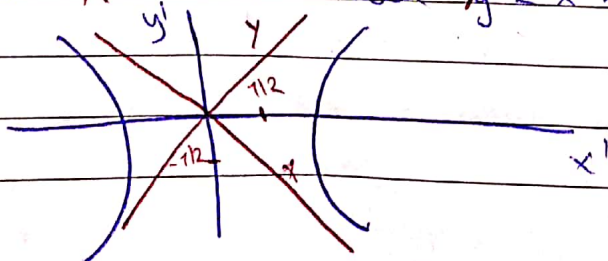
Πα. 5 Να μελετηθεί η $xy = 1$

↑ καμπύλη

Ποια δεν είναι ελλειψη? Ποιό στην ελλειψη τα x και y είναι περιορισμένα. Εδώ τα x, y αυξάνουν παραβολή δεν είναι τμήμα γραμμών

$$(x')^2 - (y')^2 = 1 \text{ υπερβολή} \Rightarrow (x' - y')(x' + y') = 1$$

Ορίζουμε $X = x' - y'$ και $Y = x' + y'$



(4.10) στους νέους άξονες x, y

$$1 = x' - y' \quad x' = \frac{1}{2} \quad y' = -\frac{1}{2}$$

$$0 = x' + y' \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

Π.χ.6 Να σχεδιαστεί η καμπύλη $Q = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = (x', y') P^t = (x', y') \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Η καμπύλη είναι ελλειψη

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

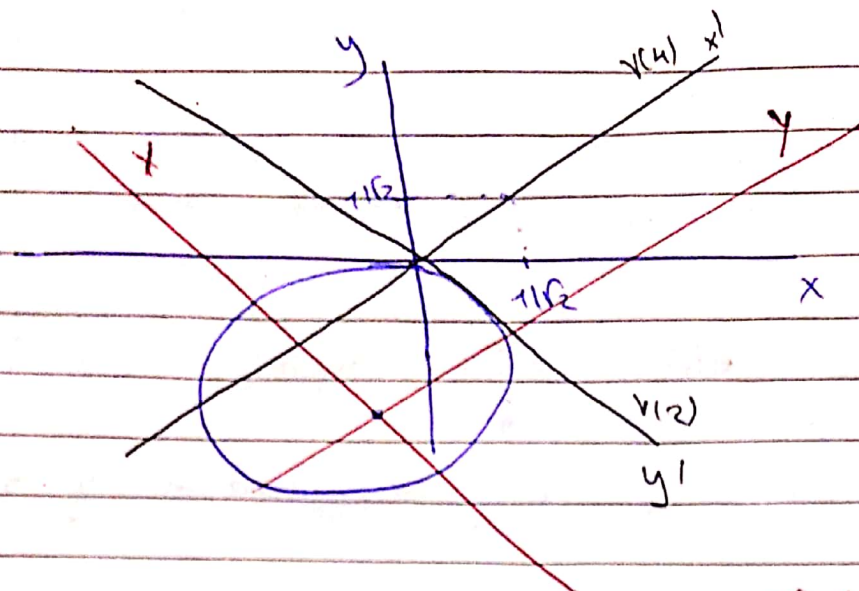
$$\text{Η } Q \text{ γίνεται: } Q = 4(x')^2 + 2(y')^2 + 4\sqrt{2}\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 4\sqrt{2}\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 4$$

$$4(x')^2 + 4x' + 12x' = 4((x')^2 + 4x' + 4) - 16 = 4(x' + 2) - 16$$

$$2(y')^2 - 4y' + 12y' = 2((y')^2 + 4y' + 4) - 4 = 2(y' + 2) - 4$$

$$Q = 4(x' + 2)^2 + 2(y' + 2)^2 - 20 \Rightarrow 4(x' + 2)^2 + 2(y' + 2)^2 = 24$$

$$X = x' + 2 \quad Y = y' + 2 \quad \frac{X^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \quad \text{ελλειψη}$$



Euler

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 \times 2 \\ \text{αββγγγ} \end{matrix}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \det A = 1$$

$\det A = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Α.Χ. 7 $\mathbb{R}^2$ με διάνυσμα $u < -, - > : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με u $< (x, y), (x', y') > = (2+4\alpha)x \cdot x' - (4-2\alpha)xy' - (4-2\alpha)yx' + (8+\alpha)yy'$
 α) Βρείτε τις τιμές του α ώστε η προωρισμένη να ορίζει
 Εσωτερικό γινόμενο

$$< (x, y), (x', y') > = (x, y) A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2+4\alpha & 2\alpha-4 \\ 2\alpha-4 & 8+\alpha \end{pmatrix}$$

Η Συγκριτική ιδιότητα ισχύει λόγω της συμμετρικότητας του πίνακα

$$\langle (x,y), (x,y) \rangle' \geq 0 \text{ πάντα και } 0 \text{ για } (x,y) = (0,0)$$

$$\langle \quad \rangle' = (x,y) P \textcircled{N} P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \geq 0 \text{ η γένει ο } A \text{ να είναι θετικά ορισμένος}$$

ο A η γένει να έχει θετικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 10 + 5a > 0$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2+4a-\lambda & 2a-4 \\ 2a-4 & 8+a-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 2a-4 \\ -20+2\lambda & 8+a-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (10-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 2a-4 \\ -2 & 8+a-\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 10 \quad -\lambda_2 = 10 + 5a - 10 = 5a > 0 \\ &\quad \underline{a > 0} \end{aligned}$$

b) Για την τιμή $a=1$ να ορίσετε ισομετρία

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle' = 6xx' - 2xy' - 2yx' + 9yy'$$

$$T: (\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle')$$

Οι ισομετρίες αντιστοιχούν ορθών βάσεις σε ορθών βάσεις

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle \xrightarrow{T} \langle (?,?), (?,?) \rangle (*)$$

Η γένει να γράψω ορθονομική βάση για να γράψω την ισομετρία. Παίρνω 2 ανεξάρτητες διανύσματα:

$$\{(1,0), (0,1)\} \text{ π.α. } \frac{6-5}{\text{με το ίδιο, ευρετήριο}} \text{ ορθών βάση}$$

$$\|(1,0)\| = \langle (1,0), (1,0) \rangle' = 6 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right)$$

$$(0,1) = \frac{\langle (0,1), (1,0) \rangle'}{\|(1,0)\|^2} (1,0) = (0,1) - \frac{-2}{6} (1,0) = \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (1,3)$$

$$\|(1,3)\|^2 = \langle (1,3), (1,3) \rangle' = 75 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{75}}, \frac{3}{\sqrt{75}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{5} \right)$$

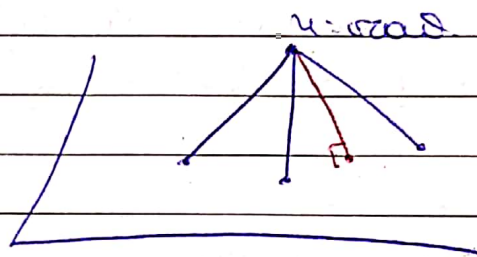
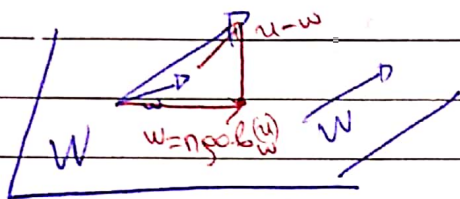
$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{15} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ και } T(0,1) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{15} \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = x T(1,0) + y T(0,1) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}y \\ \frac{\sqrt{3}y}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y\sqrt{3}}{15} \\ \frac{y\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix}$$

Π. 8 $W = \langle (1,0,-2,1), (2,1,-2,0), (1,-1,-1,3) \rangle$

$u = (2,3,2,2) \notin W$. Ν.β. Διανύσματα $w \in W$ ώστε η απόσταση $\|w - u\|$ να είναι ελάχιστη



Το w είναι η προβολή του u στον W

$$W = \langle (1,0,-2,1), (2,1,-2,0), (1,-1,-1,3) \rangle \text{ βάση}$$

Θα ορθοκανονικοποιήσουμε τη βάση του W με Gram-Schmidt

$$\text{Θα βρούμε την } \text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle u, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 +$$

$$+ \frac{\langle u, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = w : \text{αυτό που ζητάει}$$